



Early Journal Content on JSTOR, Free to Anyone in the World

This article is one of nearly 500,000 scholarly works digitized and made freely available to everyone in the world by JSTOR.

Known as the Early Journal Content, this set of works include research articles, news, letters, and other writings published in more than 200 of the oldest leading academic journals. The works date from the mid-seventeenth to the early twentieth centuries.

We encourage people to read and share the Early Journal Content openly and to tell others that this resource exists. People may post this content online or redistribute in any way for non-commercial purposes.

Read more about Early Journal Content at <http://about.jstor.org/participate-jstor/individuals/early-journal-content>.

JSTOR is a digital library of academic journals, books, and primary source objects. JSTOR helps people discover, use, and build upon a wide range of content through a powerful research and teaching platform, and preserves this content for future generations. JSTOR is part of ITHAKA, a not-for-profit organization that also includes Ithaka S+R and Portico. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

Excerpta ex Epistolis non-nullis, ultrò citròque ab Illustrissimis Viris, *Slusio* & *Hugenio*, ad Editorem scriptis, de famigerato *Alhazeni* Problemate circa Punctum Reflexionis in Speculis cavis aut convexis; & primò quidem ex Prima *Hugenii*, 26 Junii 1669. scripta:

— **M**itto Tibi hac occasione Constructionem Problematis *Alhazeni* nuper à me inventam, & à Collegis meis felicem satis judicatam. Problema est;

Dato speculo cavo aut convexo, itemque oculo & puncto rei visæ, invenire Punctum Reflexionis.

Esto speculum ex sphaera quæ Centrum habeat *A* punctum, oculus vero sit in *B*, & punctum visibile in *C*, planumque ductum per *A, B, C*, faciat in sphaera circulum *Dd*, in quo invenienda sint Reflexionis puncta. Per tria puncta *A, B, C*, describatur circuli circumferentia; cujus sit centrum *Z*, occurrat autem ei producta *AE*, perpend. *BC* in *R*, & sit duabus *RA, OA*, tertia proportionalis *NA*, eritque *NM*, parallela *BC*, altera asymptotum. Rursus sint proportionales *EA, $\frac{1}{2}AO, AI$* , & summâ *IX* equali *IN*, ducatur *TM* parallela *AZ*; eâque erit altera asymptotos. Denique sumtis *IX, IS*, quæ singulæ possint dimidium quadratum *AO*, unâ cum quadrato *AI*; erunt puncta *x* & *S* in hyperbola, aut sectionibus oppositis *Dd*, ad inventas asymptotos describendis, quarum intersectiones cum circumferentia *DO*, ostendent puncta Reflexionis quæsita. Constructio hæc, in omni Casu, quo Problema Solidum est, locum habet, præterquam in uno, ubi non hyperbola sed parabola describenda est; cum nimirum circumferentia per puncta *A, B, C* descripta, tangit rectam *AE*.

Hæc *Dn. Hugenius*, quorum cum fecisset Editor copiam *Dn. Slusio* 24 Sept. 1670; hic d. 22. Novemb. ejusdem anni hoc modo respondit;

— Ut ad jucundissimas tuas respondeam, quas nuper admodum accepi, cum variis de rebus agant, ab illa incipiam quæ mihi statim in oculos incurrit, ab *Alhazeni* nimirum Problemate, cujus constructionem à Viro Nobilissimo ad vos transmissam ut vidi, protinus eandem esse cum mea suspicatus sum; sed in peccatis Adversariis

sariis meis, non leve discrimen reperi, ut mox videbis, & jam sanè vidisses nisi me prolixitas ante hac à scribendo deterruisset. Nequid tamen dissimulem, cum Nobilissimi Hugonii constructionem ad calculos revocarem, eandem omnino mecum analysin secutum esse deprehendi; sed cum ex illa duæ nascantur effectiones, utraque per hyperbolam circa asymptotos; ille unam, ego alteram, uti facilio-
 Vid. Tab. II. rem, selegeram. Evidens est autem, nihil aliud quæri
 Fig II, III, IV. hoc Problemate (si illud ad terminos merè Geometricos revocemus) nisi in dato circulo, (cujus centrum A , radius AP) punctum aliquod ut P , à quo ductis ad puncta data E , B , inaequaliter à centro A distantia, rectis PE , PB , recta AP producta bisecet angulum EPB . Quod quidem varios casus recipit. Vel enim normalis ex A in rectam EB , nimirum AO , cadit inter E & B ; vel ultra B . Si ultra, vel rectangulum EOB æquale est quadrato AO , vel majus vel minus. De casu æqualitatis videbimus infrà; nunc verò tres alios casus eadem ferè constructione complectemur. Per tria puncta AEB transeat circulus, ad cujus circumferentiam producat AO in D . Ac si quidem punctum O cadat inter E & B , recta AO versus O producenda erit; sin autem ultra B , sitque rectangulum EOB majus quadrato AO , producenda erit versus A ; at si rectangulum quadrato minus fuerit, circulus in ipso puncto D , rectam AO secabit. Tum ducta AX parallela EB , secante circumulum datum in N , fiat ut rectangulum DAO ad quadratum AN , ita $\frac{1}{2}$ AX ad AH , quæ sumenda erit versus X , si O cadat inter E & B , aut rectangulum EOB minus sit quadrato OA ; at ex parte contraria, si sit majus. Ponatur nunc OQ æqualis AH (in directum EB primo & secundo casu, tertio verò, versus E ;) Tum fiant proportionales XA , NA , HK , sumenda omni casu versus X : sectaque AO in V , ut sit eadem ratio KA ad AV , quæ AD ad AX ; jungatur KV , ac producat $donec$ occurrat recta EM parallela OA , indefinite productæ, in puncto L ; erunt omni casu KL & QL asymptoti Hyperbolæ, quæ per punctum O descripta, proposito satis faciet: Hoc tantum discrimine, quòd primo & secundo Casu hyperbola per O , Problema solvet in speculo convexo, secto vero ei opposita in concavo; at 3.^o casu contrà, Hyperbola per O serviet concavo, ejus opposita convexo. Atque id quidem, cum punctum V cadit inter A & O ; nam si ultra O caderet, unica Hyperbola inter eadem QL , KL descripta, tam speculo convexo quàm concavo satisfaceret. Caterum si V caderet in ipsum punctum O , Problema
 tunc

tunc planum esset, & ipsæ rectæ LQ , LK illud absolverent. Unde patet, Problematis hujus dari casus infinitus, qui per locum planum solvi possunt: quo magis veniâ digni videntur ij, qui illud per eundem locum universè solvi possi censuerunt, quod ipsis aliquoties calculus feliciter cecidisset. Nulla enim dari potest trium punctorum A, E, B positio, (de casu æqualitatis rectanguli EOB , & quadrati AO mox videbimus,) quæ non admittat circulum aliquem ex centro A describendum, ad cujus circumferentiam Problema per locum planum solvi queat. Hujus autem circuli radius, si tanti est, ita invenietur: In primo & secundo casu superioris constructionis fiat ut quadratum AX unâ cum duplo rectangulo OAD , ad duplum quadratum AD ; ita quadratum AO ad quadratum AN , erit AN radius quæsitus. At in 3^o casu, faciendum est, ut quadratum AX minus duplo rectangulo OAD , ad duplum quadratum AD ; ita quadratum AO ad quadratum AN .

Construendus nunc superest alius casus, æqualitatis nempe rectanguli EOB & quadrati AO , sive in quo circulus, per puncta A, B, E descriptus, tangit rectam AO . Rectè autem monuit Clarissimus Hugenius, hoc casu describendam esse Parabolam, quod tamen non ita intelligendum est, quasi per Hyperbolam solvi non possit, cum & Hyperbolam & Ellipsin, imò infinitas (si quis methode nostrâ uti velit) admittat; sed quod Parabolam quoque recipiat, quam alii casus respuunt. Eadem ratione temperandum est quod ait; Constructionem suam omni casu quo problema solidum est, locum habere; intelligit enim, levi mutatione semper inveniri Hyperbolam quæ proposito serviat: quod casus à nobis superius constructos cum ejus constructione comparanti planum fiet. Ut autem ad casum æqualitatis redeam, & ne quid temerè asseruisse videar, Ecce tibi, non unam, sed duas parabolas, ac præterea
Vid. Tab. II.
Fig. V.
hyperbolas oppositas quæ propositum absolunt. Sint, ut prius, puncta data E, B , circulus ex centro A , ac alius per tria puncta A, E, B , cujus tangens sit AO , centrum D . Ductâ diametro $NADX$, fiant tres proportionales XA, NA, ZA , cujus dimidium sit AL . Fiant iterum tres proportionales $2OA, NA, IA$, cujus dimidium sit KA , & perficiatur rectangulum $LAOV$; productâ quæ LV in S , donec VS sit tertia proportionalis ipsarum AI, OV ; axe SL , latere recto AI , vertice S , describatur parabola; hæc enim circulum secabit in punctis P, P quæsitis. Tantundem faciet alia, si perfectò rectangulo $DAEC$, & productâ KC in T , ita
ut

ut CT sit tertia proportionalis ipsarum AZ , DC , describatur circa axem TK , vertice T , latere recto, ZA : occurret enim circulo in
 Vid. Tab. II. iisdem punctis PP . Facilior adhuc est constructio per
 Fig. VI.

sectiones oppositas; factis enim, ut prius, tribus proportionalibus XA , NA , ZA , demittatur ZI normalis, tertia proportionalis duplæ AO , & AN . Erit itaque ZI major ZA , cum dupla AO minor sit XA : Tum in puncto I , inclinentur utrinque angulo semirecto ad lineam IZ , rectæ IQ , IM , & ab utraque parte indefinitè producantur; demum circa illas tanquam asymptotos describatur per A hyperbola, & alia ipsi opposita; hæc enim satisfaciet Problemati in speculo convexo, illa in concavo. Cum verò, ut ostendimus, ZI semper major sit rectâ ZA , recta IM nunquam transibit per A . Non dabitur itaque casus, quo ex hac constructione, velut in præcedentibus, Problema per ipsas asymptotos solvi possit: Et tamen hoc quoque aliquando locum planum admittit; cum scilicet accidit, ut recta XO ducta ad centrum D tangat circulum NP ; ipsum enim punctum contactus quæstionem solvit. Et hæc quidem de Problemate, quod hætenus multorum ingenia exercuit, & cujus solutionem ante aliquot annos absolvi, urgente Clar. Gutischovio, Lovaniensi Matheseos Professore, qui sibi usui futurum aiebat; moliebatur enim nescio quid in Catopiricis: Sed mors manum iniecit, neque enim, ut hoc obiter addam, quidquam huiusmodi in schedis ejus repertum esse intellexi.

Hætenus Dn. Slusius; cujus Epistolæ Apographum cum, Authore conscio, Editor communicasset Dn. Hugenio, simulque ex aliis laudati Slusii literis, 9 Martii 1671. datis, innuisset, invenisse ipsum duas alias ejusdem Problematis Analyses, priori illâ faciliores, & constructione inter se, & ab illa, diversas; quin imò præparationem quandam Generalem, ex qua Problematum omnium, quæ ad Punctum Reflexionis in Speculis Sphæricis, concavis & convexis, determinandum spectant, Analysis facile deduci possit: Dn. Hugenius Gallicè rescripsit 7 Novem. 1671. (tardiùs, ob incommodam puto valetudinem,) in hanc sententiam;

Obstrictum me tibi fateor, eò quod Slusianam Problematis Alhazenii constructionem impertiri voluisti. Exurgit illa, ut rectè notavit, ex eadem Analysis cum mea, ab eaque non longe discrepat; videtur tamen, meam esse naturalem magis, idque ob Hyperbolæ Asymptotæ dispositionem, nec tamen plus operæ requirit quam Slusiana.

Oportet

Oportet equidem, ut ipse hac de re cum eo agam, qui est Geometrarum, quos novi, omnium doctissimus candidissimusque; saltem ut copiam ab ipso petam facilioris adhuc illius Analyticos, quam invenisse se de hoc Problemate affirmat.

Sic Dn. Hugenius; qui cum aliis fortè negotiis, vel etiam adversà valetudine impeditus, ipsi Dn. Slusio de hoc argumento scribere differret, Slusius verò dicti Hugenii mentem ab harum Editore accepisset, ipse (Slusius, inquam.) literas hîc subjunctas, Editori missas, reposuit.

Antequam ad literas tuas, 22^o mensis elapsi datas, respondeam, officii mei ratio postulat hoc Anni novi principio, ut faustum illum ac felicem cum longa similium serie, Tibi, Vir Clarissime, ac Societati Illustrissima & Όλως Βεβαίη, apprecer, quò ea que felicibus adeò auspiciis capta sunt, porro prosequi, ac tandem, magno Reip. literaria emolumento, ad exitum perducere Vobis liceat. Literas verò tuas quod attinet, gratias habeo maximas pro iis, qua me solitâ humanitate scire voluisti. Caterum à Cl. Hugenio nihil adhuc accipi, aliis, ut existimo, studiis occupato. Quoniam autem Tu, V. C. videri vis meas esse aliquid putare nugas, accipe, qua circa Alhazeni Problema, curis secundis, meditatius sum.

Datus sit Circulus, cujus centrum A; puncta data sunt D & d. Supponatur factum quod queritur; sitque Radius incidens DE, reflexus Ed; & ex puncto reflexionis E cadat in junctam DA normalis EI, & in eandem, ex d, normalis dN, occurrantque eidem Tangens EC & Radius dE, productus in B. Sit nunc DA = z. AI = a. NA = n. EI = e. dN = b. BA = y. AE = q. CA = x. Igitur, cum anguli, DEC, CEB, sint aequales, & angulus CEA rectus, ex hypothesi, erunt tres, DA, CA, BA, harmonice proportionales, (hoc enim facile ostenditur.) Erit itaque ut DA ad BA, ita DC ad CB; sive in terminis Analyticis, $z|y|z-x|x-y$; & $2zy-xy = zx$ sive $\frac{2zy}{z+x} = x$. Cum autem Rectangulum CAI, sive xa sit aequale Quadrato AE sive qq, erit $x = \frac{aq}{z}$, & per consequens $\frac{2zy}{z+x} = \frac{qz}{z}$ sive $\frac{2zy}{2z+x} = y$. Porro, est ut dN ad EI, ita NB ad IB; sive $b|e|y-n|y-a$. Itaque $ye-ne = by-ba$; & $y = \frac{ba-ne}{n-e}$. Igitur $\frac{2zy}{2z+x} = \frac{ba-ne}{n-e}$ sive $2zbaa-2znae-qqba+qqne = bzqq-zqqe$. Quae aequatio est ad Hyperbolam circa asymptotos, cujus constructio cum Circulo dato, Problemati satisfacit. Cum verò, ob Circulum, sit $qq = a+tee$, si loco $2bzaa$ ponatur ejus valor $2bzqq-2bzee$, habebitur alia pariter ad Hyperbolam circa asymptotos, $bzqq-2bzee-2znae-qqba+qqne = -zqqe$. Et hac methodo, atque illâ, quam in libello nostro de Analyfi exposuimus, prodibunt infinita Aequationes ad Hyperbolas & Ellipses, quae cum Circulo dato Problema absolvent; nisi quod Effectiones plarumque intricatiores evadant quàm ut opera pretium sit illas aggredi: Construi tamen poterunt eo modo, quo usi sumus in Ellipsi, ejusdem libelli nostri p. 62.

Retulimus, ut vides, calculi nostri summam ad lineam D A; sed satis animadvertis, non majori difficultate referri potuisse ad d A (quæ pariter data est,) *ductis scil. lineis, quas in Schemate punctis adumbravimus. Verum novo calculi labore non est opus. Si enim recta d A, ejusque partibus, eisdem ac prius terminos analyticos adhibeas, b.e si ipsam d A facias aequalem z, D n = b. n A = n. A I = a. i E = e, &c; prodibit eadem Aequatio quæ prius; & infinitas alias Hyperbolas & Ellipses obtinebis, quæ cum Circulo dato Problemati satisfacient. Quod si idem essem, si singulos casus prosequi vellem, cum illorum Aequationes solâ signorum + & - variatione discernantur. Unum tamen excipio, nim. cum angulus d A D est rectus; ejus enim aequatio habetur, expunctis à priori aequatione partibus, in quibus n (quæ in nihilum abit) invenitur: nempe hæc, $2 z b a a - q q b a = b z q q - z q q e$, vel (pro $2 z b a a$ posito ejus valore) $z b q q - q q b a = 2 z b e e - z q q e$.*

Sed animadvertendum est, quòd, licet referendo Analysin ad rectam D A, statim sese offerant in aequatione duæ Hyperbolæ; & alia totidem à prioribus diversa, cum refertur ad rectam d A; easdem tamen omnino Parabolas haberi, ad utramvis rectarum d A vel D A referatur Analysin: cujus rei ratio levi consideratione Tibi occurret.

Patere nunc, V. Cl. ut superiorem Analysin omnibus, quæ circa Speculorum Sphericorum reflexionem proponi solent, Problematibus V. Tab. II. applicem, novo factò Schemate. Sit igitur, ut prius, Circulus, Fig. VIII. cujus centrum A, punctum D datum, & ab eo radius incidens D E, cujus reflexus sit E Q. Junctâ d A, ducatur ad illam Tangens E C, & normalis E I; & producaturs ad eandem, recta Q E B; denominentur partes ut prius D A = z. C A = x. A E = q. B A = y. A I = a. I E = e. Igitur, propter tres D A, C A, B A, Harmonice proportionales, & tres C A, A E, A I, Geometricè, semper habebitur æquatio $y = \frac{z q q}{2 z a - q q}$, in quocunque Circuli punctum cadat D E. Itaque, si queratur punctum E, in quod si radius D E incidat, reflectatur parallelus diametro L A V normali ad D A; reflexus Q E, productus transibit per I, ut patet; & I ac B coincident. Igitur $a = y = \frac{z q q}{2 z a - q q}$; sive, $a a - \frac{1}{2} \frac{q q^2}{z} = \frac{1}{2} q q$, & Problema per plana solvetur.

Si queratur punctum, à quo radius reflectatur parallelus alteri cuilibet lineæ, ut A K (ducta ex centro A;): ducatur ad illam, ex puncto I, Tangens K L = d. Evidens est, Triangula A K L, E I B, fore similia, cum omnia latera unius parallela sint lateribus alterius. Itaque A L ad L K ut E I ad I B, sive $q | d | e | a - y$; & $\frac{q a - d e}{q} = y = \frac{z q q}{2 z a - q q}$; & $z q^3 = 2 q z a a - 2 z d a e - q^3 a + q q d e$; sive, pro a a posito $q q - e e$, $z q^3 = 2 z q^3 - 2 z q e e - 2 z d a e - q^3 a + q q d e$. Utraque autem æquatio est ad Hyperbolam circa asymptotos, quæ cum Circulo dato Problema absolvit.

Proponatur nunc efficere, ut radius reflexus transeat per datum punctum N (ut in Problemate Alhazeni,) vel ut productus versus punctum reflexionis E occurrat dato puncto N. Ex N cadat in AL normalis NO = n, sitque AO = b. Patet esse, ut AO ad differentiam ipsarum ON, AB, ita EI ad IB, h. e. $b|n-y|e|a-y$; vel $b|y-n|e|a-y$. Igitur $\frac{b a - n e}{b - c} = y = \frac{z q q}{2 z - q q}$. Unde $2 z b a a - 2 z n a e - q q b a + q q n e = b z q q - z q q e$; nim. illa ipsa equatio Problematis Alhazeniani quam supra innuimus: Vel, secundo casu, $\frac{b a + n e}{b + c} = y = \frac{z q q}{2 z + q q}$, sive $2 z b a a + 2 z n a e - q q b a - q q n e = z b q q + z q q e$. De quibus equationibus plura non addo, cum vel nimia sint fortasse quæ supra diximus.

Atque hac sunt Problemata, quæ circa Punctum reflexionis proponi solent in quibus tamen finitam puncti D dati distantiam supposuimus. Sed facilius erit Analysis, si supponamus Infinitam. Secta enim CA bifariam in G, constat ex proprietate trium, DA, CA, BA, Harmonicè proportionalium, tres DG, CG, BG, fore Geometricè proportionales, suppositâ quâcunque puncti D distantia. Itaque, si supponatur Infinita, BG abibit in nihilum, & punctum B cum puncto G coincidet. Igitur AB erit perpetuò aequalis BC; erit itaque CA = 2y, & Rectangulum CAI, æquale Quadrato AE, dabit, in terminis Analyticis, $2 a y = q q$, sive $y = \frac{q q}{2 a}$: Cumque distantia puncti D supponatur infinita, erit ED parallela AC. Itaque, si queratur radius reflexus parallelus AL, quoniam eo casu a & y coincidunt, erit $a = y = \frac{q q}{2 a}$, sive $a a = \frac{1}{2} q q$: Si queratur ut parallelus sit AK, erit rursus $q|d|e|a-y$; & $\frac{q a - d e}{q} = y = \frac{q q}{2 a}$, sive $2 q a a - 2 d a e = q^3$. Si petatur ut transeat per N, erit, ut supra, $\frac{b a + n e}{b + c} = y = \frac{q q}{2 a}$, & $2 b a a + 2 n a e = b q q + q q e$: quæ equationes sunt quoque ad Hyperbolas circa Asymptotos, nisi N punctum esse supponatur in AL; nam, cum tunc n abeat in nihilum, subiat is ab equatione partibus, in quibus n continetur, residue dant equationem ad Parabolam, ut supra quoque monuimus.

Non expectas, V. Cl. ut cum specula Concava hactenus in exemplum adduxerim, nunc agam de Convexis. Scis enim, eandem esse prorsus Analysis, & Equationes solâ signorum + & — variatione distingui. Scis, Parabolam vel Ellipsin, quæ uni satisfacit, satisfacere alteri; & si Hyperbola in Convexo problema absolvat, eas oppositam paria facere in Concavo. His itaque omisiss, addo tantum, eadem Analysis haberi in Speculis Concavis focos & spatia, quæ radii occupant in axe, datâ qualibet puncti lucentis distantia: Sed mirâ facilitate, cum radii supponuntur paralleli; quod tamen nonnullo circuitu à quibusdam demonstrari vidi. Nam in Speculo Concavo EE, cujus centrum A, si radius extremus reflecti intelligatur ad axem AR in B, ductâ tangente EC, erit CB = BA. Bisecetur semi-axis

AR in Q; erit itaque Q focus. & QB spatium quæsitum. Est autem QB dimidia CR (ob æquales AQ, QR, AB, BC,) h. e. dimidia excessus secantis arcus ER supra sinum totum. Igitur si arcus ER sit (e. g.) grad. 9, erit AC 101246, & BQ $\frac{623}{100000}$ ipsius AR.

Sed nimium Te moror in tricis hisce Geometricis, quibus me defunctum existimabam, nisi quod occurrant saepe vel aliud agenti. Itaque si Deus vitam & otium dederit, hoc vere fortassis in publicum emittam mea, de Problematum determinatione, περί μοναχοῦ λόγου, de Tangentibus Curvarum, μελέτηματα; præsertim cum Cl. Riccius me moneat, à se, studiis aliis occupato, nihil expectandum esse; & nuper ἀπεροδοῦντος inciderim in methodum facillimam ea demonstrandi, qua longiore circuitu olim inveneram; utrâque tamen viâ in brevissimam ac facillimam Regulam desinente. Sed quid futurum sit, Θεῶν ἐν γένεσι κῆται :

Ego enim Pyrrhoniano more hætenus ἰδὲν ὀρίζω.*
 *Quid hic de Tangentibus Curvarum pollicetur Vir Illustrissimus, præstita ab eo vide in Transact. N^o 95.

Vale, Vir Cl. meque ex asse tuum, ut Soles, amare perge. Dab. Leodii VI. Kalend. Januar. st. n. CIOIOCLXXII.

Hæc Dn. Slusius; quæ quomodo placuerint Dn. Hugenio, quidque hic iis rescripserit, aliâ occasione, cum unâ vice omnia huc spectantia tradi commodé nequeant, Deo dante, exhibebimus.

Tab. II.



